



TITLE:

1次元量子系 : 共形場の理論と朝永
・ Luttinger液体(低次元量子系,第
46回物性若手夏の学校(2001年度
) (その2),講義ノート)

AUTHOR(S):

川上, 則雄

CITATION:

川上, 則雄. 1次元量子系 : 共形場の理論と朝永・Luttinger液体(低次元量子系,第46回物性若手夏の学校(2001年度)(その2),講義ノート). 物性研究 2002, 77(6): 985-1010

ISSUE DATE:

2002-03-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97195>

RIGHT:

1 次元量子系： 共形場の理論と朝永・Luttinger 液体

大阪大学・大学院工学研究科・応用物理学専攻 川上則雄

目 次

1	はじめに	986
1.1	1次元系の量子臨界現象	986
1.2	1次元電子系と朝永・Luttinger 液体	987
1.3	本テキストの構成	988
2	共形場の理論	988
2.1	共形場の理論の基礎	988
2.2	有限サイズ・スケーリング	990
2.3	$c = 1$ ガウシアン理論	991
2.4	電子系の厳密解と朝永・Luttinger 液体	991
3	境界のある共形場の理論	993
3.1	境界共形場理論の基礎	993
3.2	不純物系のスペクトル	994
3.3	カノニカル臨界指数と局所フェルミ液体	995
3.4	赤外発散に関連した異常指数	996
3.5	マルチチャネル近藤効果	997
4	ボゾン化法	998
4.1	朝永・Luttinger 模型	998
4.2	位相ハミルトニアン	1000
4.3	Heisenberg 模型のボゾン化	1001
4.3.1	ボゾン化と sine-Gordon 模型	1002
4.3.2	朝永・Luttinger 液体の不安定性とスピンギャップ生成	1003
4.4	非線型シグマ模型と Haldane ギャップ	1004
5	応用	1006
5.1	カーボンナノチューブ	1006
5.2	量子ホール効果のエッジ状態	1007
6	おわりに	1008

1 はじめに

近年、物性物理学のいろいろな分野で1次元量子系が注目を集め、精力的な研究が展開されている。高温超伝導物質に関連して系統的に合成された1次元スピン系や梯子型スピン系、これにホールをドーピングした相関電子系などが典型例である。また、半導体の分野では量子細線やカーボンナノチューブなども理想的な1次元量子系の研究舞台を与えている。

1次元量子系の低エネルギー物理には、系の詳細にはよらないユニバーサルな振る舞いが現れる。これを記述する枠組みは「朝永・Luttinger 液体」と呼ばれ、3次元の「フェルミ液体」に相当する1次元量子系の基礎概念となっている。このようなユニバーサルな振る舞いは、1次元量子系の美しい対称性と密接に関連している。この対称性は「共形不変性」と呼ばれ、このような対称性をもつ場の理論が「共形場の理論」である。共形場の理論は、臨界現象を記述する最も基礎的な理論である。

この講義では、共形場の理論を中心に1次元量子系に関する基礎的な事柄を説明する。本題に入る前に、この節では1次元量子系の臨界現象について簡単にまとめる。

1.1 1次元系の量子臨界現象

1次元量子系では、温度を下げていっても3次元で期待されるような相転移は一般に起こらない。これは低次元特有の大きな量子揺らぎによるものであり、基底状態は長距離秩序を持たない「量子液体」の状態となることが多い。これを見るため、まず有限温度における1次元量子系を思い浮かべ、ある点にいる粒子の振舞いがそこから離れた別の点にいる粒子の振舞いにどの程度影響を及ぼすか考えてみる。互いに影響を及ぼし合える距離は相関距離とよばれる。もちろん有限温度では熱的な乱雑さのため相関距離は有限となっている。温度が下がってくると、熱揺らぎが徐々に抑えられるので相関距離は長くなる。

このようにして到達した絶対零度での量子液体の状態は、大きく二つのクラスに分けられる。まず、第一のクラスは素励起にギャップが存在するもので、この典型例が Haldane ギャップをもつスピン系である。この基底状態は、有限の相関距離を持つ量子液体である。一方、素励起にギャップがない場合には、温度の低下とともに相関距離はどんどん長くなり、やがて絶対零度ではこれが無限大になる。したがって、基底状態は長距離秩序を持たないものの、ほとんど秩序しかかった量子液体となっている。この場合2点相関関数は長距離において $x^{-\alpha}$ タイプのべき乗型の減衰を示す。このように、1次元量子系では実際の相転移は起こらないが、絶対零度において無限大の相関距離を持つ臨界点の実現しうる。このギャップレス量子系で起こる現象が、時空 $(1+1)$ 次元の量子臨界現象であり、この講義で対象としているものである。

このような $(1+1)$ 次元の臨界現象を記述する理論は次のような著しい性質を持つ。まず、臨界点においては相関距離が無限大となっているので低エネルギー（長波長領域）の物理は、連続的な場の理論で記述される。よく知られているように、この場は一樣なスケール変換に対する不変性を持つ。実際には、臨界点での対称性はこれよりさらに高く特に $(1+1)$ 次元では無限の対称性となっている。これが以下に述べる2次元の共形不変性である [1]。1次元量子系に2次元の場の理論が現れるのは、1次元量子系が時間発展することにより、2次元世界面を張るためである。したがって、1次元量子臨界系の解析には2次元の共形場の理論がその威力を発揮する [1, 2, 3]。

1.2 1次元電子系と朝永・Luttinger 液体

1次元量子系の中で特に系統的に研究されている1次元電子系について考え、これが上記の量子臨界現象とどのように関係しているか簡単に説明する。

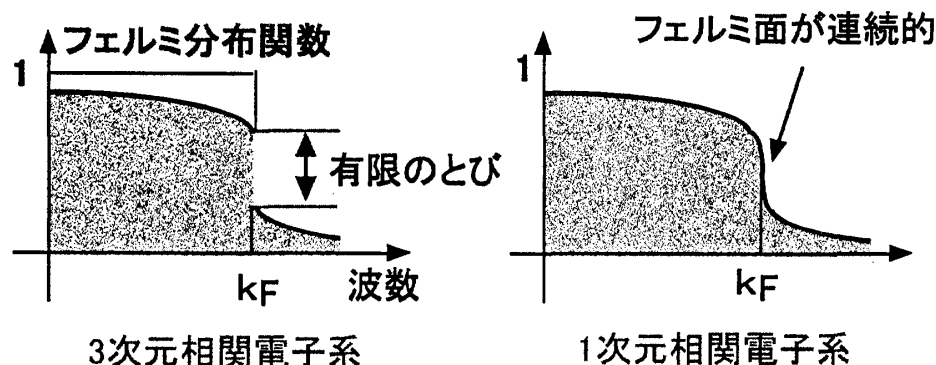


図 1: 運動量分布関数

3次元電子系の低温での性質は、一般にランダウの「フェルミ液体論」で理解されている。この理論では、相互作用の効果は電子の有効質量などに繰り込まれ、電子は準粒子と呼ばれる「衣を着た自由電子」として振る舞う。このことは、フェルミ分布関数を一般化した「運動量分布関数」を用いて表現されることが多い(図1)。相互作用のない自由電子では、運動量分布(フェルミ分布)はフェルミ面でジャンプを示し、フェルミ粒子としての特徴を示す。相互作用が導入されても、3次元系ではパウリ原理による拘束がたいへん強いので電子の散乱は大きな規制を受ける。その結果、フェルミ分布関数は相互作用が入っても、フェルミ面において依然として不連続性を示しシャープなフェルミ面を維持する。この不連続性の存在がフェルミ液体の証であり、これが存在することによって、上で述べた衣を着た自由電子(準粒子)の存在が許される。

しかしながら系の次元が低くなると、フェルミ液体論は安心して使えなくなる。特に、1次元電子系ではフェルミ液体は大きな量子ゆらぎのため破綻する。この場合、フェルミ液体と対照的に、シャープなフェルミ面は、相互作用によって完全にならされてしまい、運動量分布関数は連続関数になる(図1)。しかしながら、運動量分布はフェルミ面で依然として異常を示し、べき依存型の関数 $|k - k_F|^\alpha$ で与えられる。すなわち、微係数が発散するタイプの異常である。ここで α は臨界指数と呼ばれ、べき異常を特徴づけるものである。このようにフェルミ面付近の運動量分布関数(もう少し一般的には相関関数)が「べき型の異常」を示すような量子液体を、フェルミ液体と対比させて、「朝永・ラッティンジャー液体」と呼ぶ[4, 5, 6]。このようなべき異常は種々の物理量の温度や周波数依存性などにも現れ、実験的にも観測されている。

1次元電子系では「衣を着た電子」の描像は成立せず、これにかわる繰り込まれた粒子はスピンと電荷の密度波が量子化された「スピノン」、「ホロン」で与えられる。電子型の準粒子にかわって、スピンと電荷励起のモードが分離してよい量子状態を作ることは「スピンと電荷の分離」と呼ばれ、フェルミ液体にはない1次元電子系の特徴である。さらにつきつめて朝永・Luttinger 液体を記述するには、上にふれた臨界現象を考えなければならない。スピノンとホロンのエネルギースペクトルを調べてみると、どちらもギャップレス励起となっている。従って、相関距離は絶対零度で無限大になり、スピノンとホロンは臨界現象を示すことになる。標語的にまとめると、1次元電子系では低エネルギー領域

でスピンと電荷の分離が起こり、それぞれのモードが量子臨界現象を示す。その結果として、種々の物理量にべき型の異常が現れ、朝永・Luttinger 液体を特徴づける。

このように、1次元電子系やスピン系を理解するためには、その臨界現象を正しく記述することが不可欠である。この基礎を与えるのが共形場の理論である。

1.3 本テキストの構成

冒頭でもふれたように、(準) 1次元量子系と見なせる物質が、数多く発見、あるいは合成されている。これらの物質でみられる量子現象を深く理解するためにも、1次元量子系の基礎を与える共形場理論や朝永・Luttinger 液体の概要を正しく把握しておく必要がある。

次章でまず共形場の理論の基礎と、それがどのように1次元量子系と関係しているかを説明する。境界を含む共形場の理論は、不純物問題や光吸収などの解析に重要となるので、これについても紹介する。さらに、1次元量子系の解析に有効なボゾン化法について説明する。講義に余裕があれば、非線型シグマ模型の方法についてもふれたい。最後に、1次元スピン系や電子系などの実験について説明する。

長さの制約もあり、本テキストには計算の詳細などを載せることができないので、文献[2]の教科書も参考にさせていただきたい。また、引用文献も最小限に留めてあること、ご容赦願いたい。

2 共形場の理論

2.1 共形場の理論の基礎

まず、共形場の理論の概略を説明する。系が二次相転移の臨界点にあると、相関距離が無限大になるため一様なスケール不変性が現れる。さらに、通常の臨界現象では空間の各点で局所的にスケールを変えても物理の本質は変わらないという「局所的なスケール不変性」が現れる。これが共形不変性と呼ばれているもので、このような不変性を持つ場の理論が共形場の理論である。このような共形不変性は、短距離相互作用を持つ任意次元の臨界現象で期待されることであるが、著しいことに2次元ではこれが無限個のパラメータをもつ対称性になっている[1]。ただし、1次元量子系の場合は、時空からなる2次元面を考える。

共形場の理論は、素粒子の弦理論の基礎として1980年代の後半から発展し、これまで臨界現象への応用が活発になされている。共形場の理論を臨界現象の基礎として詳細に定式化し、確立したのは、Belavin-Polyakov-Zamolodchikovの2次元共形場理論に関する論文である[1]。この2次元の共形不変性を数学的に記述する基礎が、以下に述べる Virasoro 代数である。

ここで、2次元空間の座標 (x, y) から複素座標 $z = x + iy$ を導入する。並進は $z \rightarrow z + c_0$ 、スケール変換は $z \rightarrow (1 + c_1)z$ という変換で与えられる。これを拡張して、共形変換は z に関する任意次数の変換を含み、一般には解析変換 $z \rightarrow w(z)$ で与えられる。ここで $w(z)$ は無限個の勝手な座標変換のパラメータを含んでいるので、共形変換は無限次元の対称性を有している。また、 $\bar{z} = x - iy$ に関する反解析変換も無限次元の対称性を持つ。

ここで代数的な定式化を行うために、無限小の共形変換 ($z \rightarrow z + \epsilon_n z^{n+1}$) に対する生成子を L_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) で導入する。すると無限個の L_n の間の交換関係は、

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \quad (1)$$

となる。これが Virasoro 代数と呼ばれる無限次元リー代数である [1]。これは z に関する解析変換の代数であるが、反解析変換の生成子 \bar{L}_n に関しても同様の代数が成り立ち、この2つは独立な代数を構成する。すなわち、 $[L_m, \bar{L}_n] = 0$ 。大雑把にいうと、任意の共形変換に対する生成子のフーリエモードが L_n である。例えば、 L_0 は $z \rightarrow z + \epsilon_0 z$ を生成するので $(1 + \epsilon_0)$ 倍の一樣なスケール変換を記述する。ここで Virasoro 代数右辺の c は、「セントラル・チャージ」と呼ばれる c -数である。この c の意味あいはいは簡単でないが、現実的な統計モデルを解析する際には、素励起の有効的なモード数と思っても構わない。重要なことは、この c の値によって臨界系のユニバーサリティ・クラスが分類されるということである。例えば $c = \frac{1}{2}$ の理論はイジング・モデルの臨界現象を記述する。1次元電子系や $S = \frac{1}{2}$ スピン鎖は $c = 1$ の理論に分類される。

共形場理論に現れるもう一つの重要なパラメタは「共形次元」と呼ばれる Δ^\pm で、共形変換の下で場が変換するときの重みを表わす (\pm は解析、反解析部分を表す)。この中でも特に中心的な役割をする場が、プライマリー場 $\phi(z, \bar{z})$ で、任意の共形変換 $z \rightarrow w(z)$, $\bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})$ に対して、

$$\phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta^+} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\Delta^-} \tilde{\phi}(w, \bar{w}) \quad (2)$$

と変換する。重要なことは、共形次元がプライマリー場の相関関数そのものを決定することである。すなわち、

$$\langle \phi(z, \bar{z}) \phi(z', \bar{z}') \rangle = |z - z'|^{-2\Delta^+} |\bar{z} - \bar{z}'|^{-2\Delta^-} \quad (3)$$

となり、これに対応する臨界指数が $2\Delta^\pm$ で与えられる。セカンダリー場と呼ばれるこれ以外の場は、ピラソロ代数のもとでプライマリー場を基本として統制され、共形次元 Δ_n^\pm によってそのラベル付けがなされる (共形次元は L_0 の固有値である)。すなわち、あるプライマリー場に属する n 番目のセカンダリー場は、その共形次元が

$$\Delta_n^\pm = \Delta^\pm + n^\pm \quad (4)$$

で与えられ、プライマリー場を基にして整数間隔 n^\pm で規則正しく並ぶ。このような構造は、共形タワー構造と呼ばれる。セカンダリー場の相関関数に対する臨界指数は $2\Delta_n^\pm$ から求めることができる。

このように、物性物理や統計物理に現れるミクロな模型を共形場理論を用いて解析するためには、まず Virasoro 代数のセントラル・チャージ c によってそのユニバーサリティ・クラスを指定し、さらに共形次元 Δ_n からその共形タワー構造を決定することが必要となる。このようなタワー構造が求められると、ミクロな模型の臨界現象が共形場理論で記述されたことになり、同時に相関関数の臨界指数が求められる。ここで対象としている1次元量子系では、厳密解や数値計算を援用することで、共形場理論はその威力を発揮する。その基礎となるのが、以下に述べる有限サイズスケーリングの方法である [7, 8, 9]。この方法を用いることにより、エネルギー・スペクトルの解析から、共形タワー構造、さらには相関関数の臨界指数を決定することができる。

2.2 有限サイズ・スケーリング

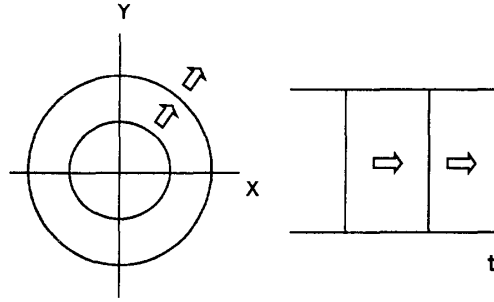


図 2: 無限平面から有限幅 Strip への共形変換： $w = (L/2\pi) \log z$.

ここで、無限平面を幅 L の帯 (Strip) に移す特別な共形変換

$$z \rightarrow w = (L/2\pi) \log z \quad (5)$$

を考える [7]。さて変換後の新しい帯を、長さ L の 1 次元量子臨界系が時間方向に発展した世界面と解釈しよう (図 2)。この見方によって、共形場理論に現れるパラメタを、量子系の有限サイズスペクトルに結びつけることができる。例えば、新しい面での時間発展はハミルトニアン \mathcal{H} で記述される。一方で、これはもとの無限平面で見ると、一様なスケールの拡大に対応し、生成子 L_0 で記述される (正確にいうと、 $L_0 + \bar{L}_0$)。この対応関係を用いると、ハミルトニアンの固有値であるエネルギー・スペクトルを解析することで、 L_0 の固有値 (これが共形次元に他ならない) を決定することができる。この方法に基づいて得られている公式の中で特に重要なものを以下にまとめる。まず、周期境界条件のもとで有限サイズ L の 1 次元量子系の基底エネルギーは、素励起の速度 v を用いて

$$E_0 \simeq \epsilon_0 L - \frac{\pi v c}{6L} \quad (6)$$

と表される [8]。ここで有限サイズ補正の項にユニバーサルな形でセントラル・チャージ c が現れている (ϵ_0 は熱力学極限でのエネルギー密度)。自由エネルギーの低温展開にも

$$f(T) \simeq f(T=0) - \frac{\pi c T^2}{6v} \quad (7)$$

でセントラルチャージが現れる [9]。一方、励起状態の固有エネルギーと運動量は

$$E_n - E_0 \simeq \frac{2\pi v}{L} (\Delta^+ + \Delta^- + n^+ + n^-), \quad (8)$$

$$P_n - P_0 \simeq \frac{2\pi}{L} (\Delta^+ - \Delta^- + n^+ - n^-), \quad (9)$$

の形をとる ($n^\pm = 0, 1, 2, \dots$) [7]。ここで $\Delta^\pm + n^\pm$ は解析 (反解析) 部分の共形次元である。このように、励起スペクトルはプライマリー場に対応するエネルギー (Δ^\pm) を基本とし、正の整数 n^\pm で指定される励起により共形タワー構造が形成されている。このことは、量子臨界系のスペクトルがビラソロ代数の既約表現で一意的に分解されることに対応している。

2.3 $c = 1$ ガウシアン理論

物性論に現れる多くの興味深い模型は、 $c = 1$ のガウシアン理論（これが、後で述べる朝永・ラッティンジャー液体に対応している）で記述される。例えば、 $S = 1/2$ の XXZ スピン鎖や、相互作用ボゾン系、フェルミオン系などがある。これらの模型を有限サイズ・スケーリングで解析すると、個々の模型によらず次のような答が得られる [6]。まず、基底エネルギー E ならびに自由エネルギー f の低温展開は、

$$E \simeq L\varepsilon_0 - \frac{\pi v}{6L}, \quad f(T) \simeq f(T=0) - \frac{\pi T^2}{6v} \quad (10)$$

とユニバーサルな形にまとまる。これを有限サイズスケーリングの式 (6), (7) と比べると、セントラル・チャージとして $c = 1$ が得られる。すなわち、共形場理論の分類によると、この系は $c = 1$ 共形場理論（ガウシアン理論と呼ばれる）で記述されることになる。この $c = 1$ というのは、上記の模型では一種類のボゾン型励起があることを意味している。さらに、励起エネルギーの解析から、解析 (+) および反解析 (-) 部分の共形次元を求めると、

$$\Delta_{\mathbf{m}}^{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta N}{2\xi} \pm \Delta D \xi \right)^2 + n^{\pm} \quad (11)$$

となる [6]。ただし、 $\mathbf{m} = (\Delta N, \Delta D, n^{\pm})$ は系の励起を表す量子数である。ここで、 ΔN は系の粒子数変化、 ΔD は左のフェルミ面から右のフェルミ面への低エネルギー励起、 n^{\pm} は左右のフェルミ面付近での粒子・正孔タイプの励起を表す。この式が $c = 1$ ガウシアン理論の共形次元であり、 $U(1)$ カレント代数から直接導かれる。すなわち、系の $U(1)$ 対称性を反映して、連続変化できるパラメタ ξ が一個だけ理論に入っており、これがプライマリー場の共形次元を決定する。プライマリー場には (a) 粒子数変化を伴う励起と (b) カレントを運ぶ励起が寄与しており、(c) 共形タワー構造を構成するセカンダリー場には、粒子・正孔励起が寄与する。プライマリー場の共形次元は $\Delta N, \Delta D$ を変えることによって得られるので、一般に無限個のプライマリー場が存在することになる。 $U(1)$ 対称性を反映した (11) の形の共形次元を持つ系が（1成分の）朝永・Luttinger 液体を定義すると考えてもよい。

例として、このスペクトルから電荷密度相関関数

$$\langle \rho(x) \rho(0) \rangle \sim \text{const.} + A_0 x^{-2} + A_2 x^{-\alpha} \cos 2p_F x \quad (12)$$

の臨界指数を読みとってみよう。まず、密度演算子 $\rho(x)$ は粒子数を変化させないので、 $\Delta N = 0$ とおく。さらに、 $\Delta D = 0, n^{\pm} = 1$ とおくと、これはカレントを流さないで、非振動の項 x^{-2} の臨界指数 2 を与える（すなわち、 $2(\Delta^+ + \Delta^-) = 2$ ）。一方、 $\Delta D = 1, n^{\pm} = 0$ とおけば、 $2p_F$ 振動の臨界指数として、 $\alpha = 2K = 2\xi^2$ を得る。この臨界指数の値は、厳密解から計算されている [6]。このように、一成分系の朝永・Luttinger 液体は $c = 1$ 共形場理論によって定式化できる。

2.4 電子系の厳密解と朝永・Luttinger 液体

電子系などの内部自由度を持つ場合も、共形場理論による解析は強力な方法となる。電子系の場合、スピンと電荷の 2 成分の素励起が低エネルギー領域で分離し、ともに臨界

現象を示す。これらが独立に $c = 1$ 共形場理論で記述される [10, 11]。例えば、1次元ハバード模型

$$\mathcal{H} = -t \sum_{\langle ij \rangle, \sigma} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + U \sum_i c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow} c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow} \quad (13)$$

を考える。この模型は、最近接の格子点を電子が飛び移り、同じ格子点に2電子がくると反発力 $U (> 0)$ を感じるという単純化された模型である。

この模型に関しては厳密解が求められているので [12]、その有限サイズスペクトルから臨界現象の解析ができる。まず、厳密解から求められる基底エネルギーの有限サイズ補正は、

$$E = L\varepsilon_0 - \frac{\pi}{6L}(v_c + v_s) \quad (14)$$

の形をとり、スピンと電荷の部分がともに $c = 1$ の共形場理論で記述されることを示している。これが、いわゆるスピン・電荷の分離である。さらに、励起スペクトル [13] の有限サイズ・スケーリングを行うと、左右の共形次元は電荷部分 (c) とスピン部分 (s) でそれぞれ

$$\Delta_c^\pm = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta N_c}{2\xi_c} \pm \xi_c \left(\Delta D_c + \frac{\Delta D_s}{2} \right) \right]^2 + n_c^\pm \quad (15)$$

$$\Delta_s^\pm = \frac{1}{4} \left(\Delta N_s - \frac{\Delta N_c}{2} \pm \Delta D_s \right)^2 + n_s^\pm \quad (16)$$

となる。 ΔN_c , ΔD_c などは電荷励起などの量子数である。ここで電荷励起に現れている dressed charge ξ_c は厳密解から計算される量で、この値が相互作用などで変化することで $c = 1$ の臨界線を描く。一方で、スピン部分には、そのようなパラメタがなく、ちょうど $\xi_s = 1/\sqrt{2}$ を代入した形になっている。この $\xi_s = 1/\sqrt{2}$ は、 $c = 1$ の臨界線上で、対称性が $U(1)$ から $SU(2)$ に高くなっている点である。このことは、スピン部分の $SU(2)$ 対称性を反映したものである。

以上のように、共形場理論で有限サイズスペクトルを分類することができると、相関関数の臨界指数を決定することができる。例えば、電荷密度の相関関数は、長距離において

$$\langle \rho(x) \rho(0) \rangle \sim \text{const.} + A_0 x^{-2} + A_2 x^{-\alpha_s} \cos 2p_F x + A_4 x^{-\alpha_c} \cos 4p_F x \quad (17)$$

と振る舞う。これに対応する臨界指数 (16) に適当な量子数を代入することによって求められ、

$$\alpha_c \equiv 4K_c = 2\xi_c^2, \quad \alpha_s = 1 + K_c \quad (18)$$

となる。第2式は、いわゆる臨界指数間のスケーリング則である。また、運動量分布関数は

$$\langle n_p \rangle = \langle n_{p_F} \rangle - \text{const.} |p - p_F|^\theta \text{sgn}(p - p_F) \quad (19)$$

の形をとり、対応する臨界指数は

$$\theta = (K_c - 1)^2 / (4K_c) \quad (20)$$

と求められる。これも、電子系の臨界指数に関するユニバーサルなスケーリング関係式である。これらの臨界指数は相互作用と電子密度の関数として厳密に計算されている [10, 11]。このように、電子系の朝永・Luttinger 液体は、電荷励起が $c = 1$ ガウシアン共形場理論、そしてスピン励起が $c = 1$ $SU(2)$ 共形場理論の、2つの独立な共形場理論の枠組みで記述される。

3 境界のある共形場の理論

共形場理論はバルクな系のみならず、境界の存在する系の臨界的性質の解析にも適用できる [7]。境界のある系とみなせる具体例として、近藤問題や不純物を介してのトンネル問題、X線吸収スペクトルなど多くの例があげられる。これらの不純物問題は1次元量子系にマップでき、不純物効果は境界効果として扱うことができる。境界のある共形場理論が特に成功を収めたのは、Affleck と Ludwig による多チャンネル近藤効果への応用である [14, 15]。境界のある共形場の理論は、不純物系を中心として物性物理にひろく応用されている [16]。

3.1 境界共形場理論の基礎

まず、境界のある共形場理論について簡単にまとめる。前節でみたように共形場理論における有限サイズスケールングを用いれば、系のスペクトルから臨界系のユニバーサリティクラスを特徴づけるセントラルチャージ c と臨界指数 x を決定することができる。境界のある場合には、境界を不変にするような共形変換を考える。バルクな系の場合は、共形変換は複素平面上の解析部分と反解析部分について独立に行なわれるが、境界のある場合には、これらは独立でなくなり、解析部分のみによって物理が決定される [7]。

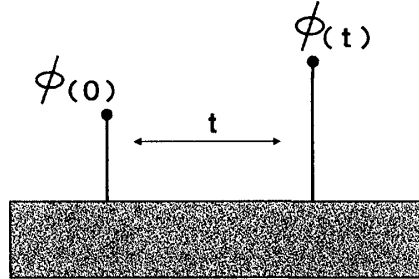


図 3: 境界付近での場の演算子

図 3 に示すような境界のある半無限平面上の 2 点相関関数を考える。ここで境界付近での長時間の漸近的な振舞いは表面臨界指数 x_s によって決められ、対応する相関関数は $\langle \phi(t)\phi(0) \rangle \sim 1/t^{2x_s}$ ($t \rightarrow \infty$) のべき型の振舞いを示す。この表面臨界指数 x_s は一般にバルクの臨界指数とは異なり、境界付近の臨界的性質を決定する境界演算子 $\phi(z, \bar{z})$ (boundary operator) の共形次元で与えられる。即ち、相関関数の境界付近での $\phi(z, \bar{z})$ の性質を議論する場合、 ϕ を解析部分 ($z = x+iy$) と反解析部分 ($\bar{z} = x-iy$) に分解し、 $\phi(z, \bar{z}) = \phi_L(z)\phi_R(\bar{z})$ とする。このとき反解析部分 ϕ_R は解析部分 ϕ_L の解析接続で与えられる。この解析、反解析部分の演算子の積を境界演算子で展開し、 $\phi_L(x+iy)\phi_L(x-iy) \sim y^{-2\Delta+\Delta_b}\phi_b(x)$ と書く。ここで Δ は ϕ_L のバルクにおける共形次元、 Δ_b は、境界演算子 $\phi_b(x)$ の共形次元である。以上より境界付近では、

$$\langle \phi(z, \bar{z})\phi(z', \bar{z}') \rangle \sim \langle \phi_b(x)\phi_b(x') \rangle \sim |x - x'|^{-2\Delta_b}, \quad (21)$$

となることがわかる。つまり、境界演算子の共形次元 Δ_b が表面臨界指数 x_s そのものを与えている。

有限サイズスケーリングの方法に基づいて境界演算子の共形次元を有限サイズスペクトルから求めることができる。すなわち、長さ l のストリップ上での有限サイズスペクトルは

$$\begin{aligned} E_g &= E_g^\infty - \frac{\pi v c}{24l}, \\ E_{ex} &= E_g + \frac{\pi v}{l}(\Delta_b + n), \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ここで、 n はセカンダリー場をラベル付けする非負の整数である。したがって、基底エネルギー E_g と励起エネルギー E_{ex} の有限サイズ補正から、セントラルチャージ c と共形次元 Δ_b を読みとることができる。ここで注意したい点は、バルク系では共形次元の解析部分と反解析部分の和で臨界指数が与えられるに対して、境界系では正則部分 Δ_b のみでこれが決定されているということである。

境界のある2次元臨界系は解析部分のみで表されることを反映して、左向き（あるいは右向き）のカレントだけを用いて系が記述される。このような系はカイラルな系と呼ばれる。単一不純物系は境界のある量子1次元系にマップすることによってカイラルな系とみなされる。また、量子ホール効果のエッジ状態もカイラルな系の例であり、解析部分のみの共形場理論で記述される。

3.2 不純物系のスペクトル

ここで不純物系の例として、近藤効果に関する臨界現象を解析をしてみる。近藤問題に関連したいくつかのモデルに対してベータ仮説による厳密解が得られているが、主に熱力学量に関する計算が行われてきた[17]。上に述べたように厳密解を用いて有限サイズスペクトルを計算すれば、近藤効果の臨界的な性質も議論することができる。計算の本質はモデルに依らず共通なので、例としてアンダーソンモデル

$$H = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + V \sum_{k,\sigma} (c_{k,\sigma}^\dagger d_\sigma + d_\sigma^\dagger c_{k,\sigma}) + \epsilon_d \sum_{\sigma} d_\sigma^\dagger d_\sigma + U d_\uparrow^\dagger d_\uparrow d_\downarrow^\dagger d_\downarrow. \quad (23)$$

を考える。ここで c 、 d 等は伝導電子、不純物電子の消滅演算子である。伝導電子は混成項 V によって、電子相関 U をもつ不純物とカップルしている。アンダーソンモデルは、金属中の局在スピンの生起の問題に対して提案されたもので、強相関の極限では近藤モデルに帰着し、近藤効果を記述する。

まず、このモデルの厳密解で計算された基底状態の有限サイズ補正を見てみると[18]

$$E_0 = L\epsilon_0 - \frac{\pi v_c}{12L} - \frac{\pi v_s}{12L}. \quad (24)$$

となる。ここで $L\epsilon_0$ は $L \rightarrow \infty$ での基底状態のエネルギーである。 v_c 、 v_s はそれぞれ電荷とスピンの励起の速度であり、伝導電子に相互作用がないのでともにフェルミ速度に等しい。この表式に(22)式の有限サイズスケーリングを適用してみると、セントラルチャージを読みとると、電荷部分とスピン部分のセントラルチャージがそれぞれ $c=1$ であることがわかり、ともに、カイラルな朝永・Luttinger液体で記述される[14]。ただし、ここでは原点に不純物がある長さ L の系を考えているので有限サイズスケーリングを適用する際に、 $L=2l$ としている。

次に励起スペクトルを見てみよう。この系で可能な低エネルギー励起として、粒子・正孔タイプの励起、および伝導電子の全粒子数 N_h (スピンの z 成分 S_h) を変化させる励起

$$N_h \rightarrow N_h + \Delta N_h, \quad S_h \rightarrow S_h + \Delta S_h, \quad (25)$$

があり、これらの励起がエネルギースペクトルに対する $1/L$ の補正項を与える。今の境界系の場合、周期境界をもつバルクの系とは異なり全粒子数の変化 ΔN_h に対するエネルギーの一次の変化が、バルクな系では化学ポテンシャルを与えるだけであるが、近藤問題の場合は、この項が不純物からの寄与として $1/L$ のオーダーで現れるのである。この寄与は、伝導電子の受ける位相シフトを δ_F とすると

$$\Delta E^{(1)} = -\frac{2\delta_F}{L} \Delta N_h, \quad (26)$$

となる。 ΔN_h 、 ΔS_h に関する二次の寄与も同様に計算できる。結局、有限サイズスペクトルの表式は

$$E = E_0 + \frac{1}{L} E_1 + \frac{1}{L^2} E_2 + O(1/L^3), \quad (27)$$

$$\frac{1}{L} E_1 = \frac{2\pi v}{L} \left[\frac{1}{4} \left(\Delta N_h - 2 \frac{\delta_F}{\pi} \right)^2 + n_c^+ \right] + \frac{2\pi v}{L} [(\Delta S_h)^2 + n_s^+], \quad (28)$$

$$\frac{1}{L^2} E_2 = \frac{2\pi v}{L^2} \frac{\chi_c^{imp}}{\chi_c^h} \left[\frac{(\Delta N_h)^2}{4} + n_c^+ \right] + \frac{2\pi v}{L^2} \frac{\chi_s^{imp}}{\chi_s^h} [(\Delta S_h)^2 + n_s^+]. \quad (29)$$

となる。ここで、 χ_c^{imp} 、 χ_s^{imp} 、 χ_c^h 、 χ_s^h はそれぞれ不純物電子の電荷感受率とスピン帯磁率、ホスト電子の電荷感受率とスピン帯磁率を表す。また、 $n_{c,s}^+$ は粒子・正孔励起を表す非負の整数である。

この表式を見ると、 $1/L$ のオーダーのスペクトルは位相シフトの効果を除いて自由電子と同じ構造を持っており、不純物電子の相関効果は $1/L^2$ のオーダーに現れている。このスペクトルの $1/L$ のオーダーの項から、系は「位相シフトの効果を含んだ」 $c=1$ の自由理論で記述されることがわかる [14]。

3.3 カノニカル臨界指数と局所フェルミ液体

以上のスペクトルから、近藤効果の臨界現象に関してどのような情報が得られるか説明する。まず、 $1/L$ のオーダーの項に注目する。この項に式 (22) の有限サイズスケーリングを適用すると、様々な相関関数の臨界指数を読みとることができる。

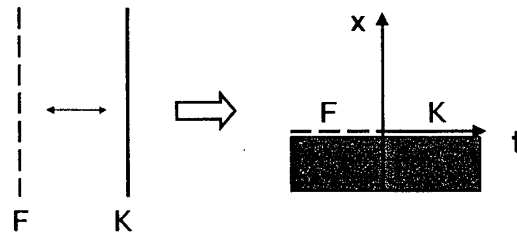


図 4: 幅の L の Strip から半無限平面への共形変換

有限サイズスペクトルから読みとった共形次元が、もとの系におけるいかなる物理的な励起に対応しているかを正しく同定するために、有限系のジオメトリーを考えてみよう。図4に示したような、一方の境界がFで他方がKという条件を付加した幅 L の帯を考える。図のように、これを

$$w = \frac{L}{\pi} \log z, \quad (30)$$

という共形変換で半無限面に移すと、ある時刻 t_0 に対して $t < t_0$ ならば境界F、 $t > t_0$ ならばKの境界を持つ系を考えることになる。

今、KとFともに「近藤境界条件」を付加すると、両端で非自明な境界を持つ系になる。これは、半無限平面での時間軸 t でみると、ずっと以前から近藤効果が生じている系を表している。エネルギースペクトルの $1/L$ のオーダーに注目してみると、近藤効果は電荷部分における位相シフトの効果としてのみ現れることが、式(27)~(29)から分かる。これは境界条件をねじることに他ならない。このように両方の境界でねじれ条件が課せられる場合には、電荷の量子数を $\Delta N_h - 2\frac{\delta_F}{\pi} \rightarrow \Delta N_h$ と定義しなおすことによって、位相シフトの効果は消去される。したがって、臨界指数を読みとる場合には(27)~(29)式において位相シフト δ_F を落した式を用いればよい[18]。

例えば、1電子グリーン関数 $\langle c_\sigma(t)c_\sigma^\dagger(0) \rangle$ は、 $\Delta N_h = 1$ 、 $\Delta S_h = 1/2$ として、

$$\langle c_\sigma(t)c_\sigma^\dagger(0) \rangle \sim \frac{1}{t}, \quad (31)$$

となり、カノニカル臨界指数を持っていることがわかる。このことは、通常近藤効果における固定点が「局所フェルミ液体」になっていることに対応している。

3.4 赤外発散に関連した異常指数

以上の考察によれば、位相シフトは臨界指数に影響を与えないように思われる。しかし、この位相シフトも系の重要な量子数であり、「赤外発散」に関連した臨界指数を与える。局所フェルミ液体をあらわす臨界指数を読みとるとき、両端に近藤境界を考えて位相シフトを落したが、これを落さずに、境界Fに自由境界、Kに近藤境界を与えた系を考える。これは図4の半無限平面でみると、時間に依存する系を考えることに他ならない。すなわち、ある時刻 t_0 に対して $t < t_0$ では、不純物電子との混成項 $V = 0$ で自由な電子系であったものが、 $t = t_0$ で V が有限値になり、不純物電子と結合するような系を考えることになる。時間に依存して変化するこのような系は、X線吸収端異常のように赤外発散が現れる系に対応している。実際、前出の有限サイズスペクトルで位相シフト項を残して、臨界指数を読みとるとX線吸収異常に関連した指数があらわれる。

例として、1電子グリーン関数 $\langle c_\sigma(t)c_\sigma^\dagger(0) \rangle \sim 1/t^\eta$ を考える。 $0 < t_0 < t$ ならば、この指数 η は、式(28)において $\Delta N_h = 1$ 、 $\Delta S_h = 1/2$ とおくことによって得られ、

$$\eta = 1 - \frac{2\delta_F}{\pi} + 2\left(\frac{\delta_F}{\pi}\right)^2, \quad (32)$$

となる。これはX線吸収異常において、始状態と終状態の重なり積分の長時間の振舞いを決める指数に他ならない。時刻 $t > t_0$ で伝導電子と相関 U を有する不純物の電子が混成することによって、伝導電子の電子状態は相互作用の存在しない始状態と比べて変動する。そして始状態($t = 0$)と終状態の波動関数の重なり積分($t > t_0$)が上記の1電子グ

リー関数で与えられる。その時間に関するべきが有限サイズスケーリングを用いて読みとれる。このように、有限サイズスペクトル(27),(28),(29)には、フェルミ液体の臨界指数だけでなく、赤外発散に関連した情報も含まれていることが示された。すなわち、相互作用やポテンシャルが時間に依存するような動的な問題に対しても共形場理論は有効であることがわかる。

ここで記した有限サイズスペクトルの表式は、量子不純物問題、および境界のある1次元系に共通のものである。

3.5 マルチチャネル近藤効果

以上の解析は、通常の近藤効果に対応するものであるが、さらに非自明な現象として、マルチチャネル模型のオーバースクリーニング近藤効果がある。マルチチャネル近藤ハミルトニアンは[15]

$$H = \sum_{k,m,\sigma} \epsilon_k c_{km\sigma}^\dagger c_{km\sigma} + J \sum_{k,k',m,\sigma,\sigma'} c_{km\sigma}^\dagger (\sigma_{\sigma\sigma'} \cdot \mathbf{S}) c_{k'm\sigma'}, \quad (33)$$

と書かれる。ここで、不純物スピンの大きさは $S = 1/2, 1, 3/2, \dots$ であり、これによって伝導電子は反強磁性的な散乱を受ける。伝導電子のスピンは $1/2$ とし (σ はパウリ行列)、 p 個の軌道自由度を持つと仮定する ($m = 1, 2, \dots, p$)。この模型に関して、以下の3種類の場合が想定される。まず、軌道数がちょうど不純物スピンを遮蔽する場合 $p = 2S$ では、通常の近藤効果が観測される。この場合には、高温で自由な向きを向いている局在スピンは温度が下がるにしたがって伝導電子によって遮蔽され始める。さらに低温になると、強結合の領域に入り、完全に局在スピンは遮蔽されスピン一重項基底状態へと落ちつく。これは、上で扱った局所フェルミ液体に対応している。このような強結合の性質は $p < 2S$ の場合 (アンダー・スクリーニング) にも実現し、不純物スピンは遮蔽のため縮んで $S - p/2$ となる。

一方、伝導電子の遮蔽チャンネルが多いオーバー・スクリーニングの場合には ($p > 2S$)、局所フェルミ液体と異なる基底状態が実現する[15]。この場合には、軌道数が多いためスピンの遮蔽しすぎが起こり、この部分をさらに残りの伝導電子が遮蔽し、ということを繰り返すことで奇妙な基底状態が実現する。例えば、この基底状態は縮退しているが、その縮重度は非有理数となる (例えば、 $S = 1/2, p = 2$ の時、縮重度は $\sqrt{2}$)。重要なことは、このような非自明な現象 (非フェルミ液体) が、実際の物理現象でも期待されるということである。この問題に対しても厳密解が求められていたが、相関関数や電気抵抗などの物理量の計算は困難であった。ここに「境界を含む共形場理論」が応用され、抵抗のべき異常などが求められ、その臨界現象が解明された[14]。

マルチチャネル近藤効果で重要な点は、不純物を境界効果として定式化した際、それに特有の「境界演算子」ならびに、「境界次元」が出現し、それがオーバー・スクリーニング近藤効果の種々の異常を決定しているということである。このような共形場理論の解析により、オーバー・スクリーニングの場合、比熱と帯磁率は低温で

$$C_{\text{imp}} \sim a_0 T^{2\Delta}, \quad \chi_{\text{imp}} \sim \text{const} - b_0 T^{2\Delta-1} \quad (34)$$

の振る舞いを示すことが示された[14]。ここで、 $\Delta = 2/(p+2)$ は、レベル- p の $SU(2)$ 共形場理論から決定される境界演算子の共形次元である。ただし、 $p = 2$ の場合は特別で、

$C_{\text{imp}} \sim T \log T$, $\chi_{\text{imp}} \sim \log T$ と対数依存性が付加される。以上の結果は、厳密解で得られていたことと一致し [17]、さらにこの解析によって、べき異常が共形場理論の境界オペレータによって完全に支配されていることが示された [14]。一方、抵抗や相関関数（オーバー・スクリーニングの場合）は従来の方法では計算できなかったが、共形場理論によってこの問題も解決された。それによると、抵抗の温度依存性は、

$$\rho(T) \sim \text{const.} - c_0 T^\Delta \quad (35)$$

となる。やはり、この温度依存性を支配しているのは、SU(2) 共形場理論の境界次元 Δ である [14]。

このように、共形場理論は不純物問題を境界のある量子臨界現象として定式化し、それまでに知られていた結果を再現するとともに、今まで求められなかった抵抗や相関関数の計算も可能とした。

4 ボゾン化法

本章では、1次元系の量子臨界現象を記述する最も基本的な朝永・Luttinger 模型とボゾン化法の概略を述べる。ボゾン化法は1次元量子系の低エネルギー励起を自由ボゾンの集まりとして記述するもので、フェルミ系、ボーズ系、スピン系などの量子臨界現象を統一的に理解するのに有効な方法である。

4.1 朝永・Luttinger 模型

まず、朝永・Luttinger 模型について簡単に紹介する。1次元フェルミオン系に関する系統的研究は、1950年に朝永の先駆的な研究に始まる [4]。朝永の考察した模型は、フェルミ面付近でスペクトルが線形の分散関係を持つ単純化された多粒子系である。この研究では、このフェルミ粒子系の素励起がボゾンで記述できることが示されており、ボゾン化法のエッセンスがすでに導入されている。その後 Luttinger によって [5]、朝永と類似の模型でバンド幅無限大の場合を考えれば厳密解が求められることが示された。このような経緯から、線形分散を持つ「厳密に解ける模型」は、朝永・Luttinger 模型と呼ばれる。

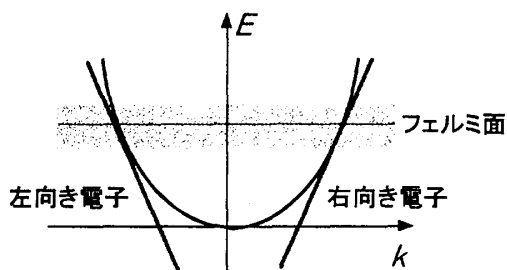


図 5: エネルギー分散とその線形化

この朝永・Luttinger 模型は、フェルミ粒子系の低エネルギー励起に注目し、次のような考察に基づき導入される。まず、フェルミ粒子系ではフェルミ面まで粒子が連続的に詰まっており、その低エネルギー励起にはフェルミ面付近の粒子のみが関与する。したがっ

て、フェルミ面付近でエネルギー分散を線形化しても、本質的な物理は記述されるはずである(図5)。そこで、運動エネルギーを

$$H_K = v_F \sum_p [(p - p_F) a_p^{(+)\dagger} a_p^{(+)} + (-p - p_F) a_p^{(-)\dagger} a_p^{(-)}] \quad (36)$$

の線形分散を持つハミルトニアンで置き換える。ただし v_F はフェルミ速度、 $\pm p_F$ は左右のフェルミ波数、 $a_p^{(+)}$ ($a_p^{(-)}$) はそれぞれ右向き(左向きの)フェルミオンの消滅演算子である。ここで、運動量の和の上限と下限を示していないが、朝永模型では運動量の和の範囲が有限であるのに対して、Luttinger 模型ではこの範囲が無限大となっている。したがって、Luttinger の模型では基底状態は負の無限大からフェルミ波数 $\pm p_F$ までフェルミオンが詰まったディラックの海である。どちらの模型もフェルミ面付近の低エネルギー励起を記述するのに本質的な差はないが、後者では相互作用を入れても厳密に解ける模型を構成できる。そこで、Luttinger の模型を朝永・Luttinger 模型と呼ぶ。

ここで、もともとのフェルミ場 $\psi(x)$ を低エネルギー領域で右(左)向きのフェルミ場 $\psi_{\pm}(x)$ で次のように

$$\psi(x) \simeq e^{ip_F x} \psi_+(x) + e^{-ip_F x} \psi_-(x) \quad (37)$$

展開する。この右向き ($\psi_+(x)$) と左向き ($\psi_-(x)$) のフェルミ場を用いると運動エネルギー (36) の実空間表示

$$H_K = v_F \int dx [\psi_+^\dagger(x) \left(-i \frac{d}{dx}\right) \psi_+(x) + \psi_-^\dagger(x) \left(i \frac{d}{dx}\right) \psi_-(x)] \quad (38)$$

が得られる。線形分散を反映して、エネルギーは座標の一階微分で与えられる。これはローレンツ不変なディラックフェルミオンに他ならない。

さて、フェルミ場で書かれた (36) (あるいは (38)) の自由ハミルトニアンをボゾン場で書きかえることから始めよう。まず、右向きと左向きのフェルミオンに関してそれぞれ密度演算子

$$J_+(p) = \sum_q a_{q+p}^{(+)\dagger} a_q^{(+)}, \quad J_-(p) = \sum_q a_{q+p}^{(-)\dagger} a_q^{(-)} \quad (39)$$

を導入する。この演算子はボゾンの交換関係

$$[J_+(p), J_-(p')] = 0, \quad [J_+(-p), J_+(p')] = [J_-(p), J_-(-p')] = \frac{pL}{2\pi} \delta_{pp'} \quad (40)$$

を満たしていることがわかる。これらは、第2式の $p = p'$ の場合を除いて容易に導出できる。一方、 $p = p'$ の場合には交換関係の導出はいくぶん厄介であるが、参考文献に詳しく書かれているのでここでは詳細は省く [2]。重要なことは、通常の模型から、低エネルギー励起に注目し連続場の理論へ移行する際には、その極限の取り方に注意が必要であるということである。

ここで、運動エネルギーの項を上記のボゾン演算子で書きなおす。まず、ハミルトニアン (36) と密度演算子 (39) の交換関係を調べてみると

$$[H_K, J_+(p)] = v_F p J_+(p) \quad (41)$$

となることがわかる。この交換関係は、仮にハミルトニアンが

$$H_K = \frac{2\pi v_F}{L} \sum_{p>0} [J_+(p) J_+(-p) + J_-(-p) J_-(p)] \quad (42)$$

となっていれば自然に導かれるものである。したがって、(36) のかわりに (42) を今考えている自由粒子の有効ハミルトニアンとみなして差し支えない。

さて、粒子間の相互作用を導入する。朝永・Luttinger 模型では、相互作用の係数をしばしば g_i とあらわす。朝永・Luttinger 模型では、2つのタイプの相互作用

$$H_I = \frac{1}{2L} \sum_p [2g_2 J_+(p) J_-(-p) + g_4 \{J_+(p) J_+(-p) + J_-(-p) J_-(p)\}] \quad (43)$$

を考える。この形からわかるように、 g_4 では同じ向きの粒子どうしが散乱する。この項は自由ハミルトニアン (42) と全く同じ形をしているので、フェルミ速度 v_F の繰り込みを生じる。一方、 g_2 のプロセスでは反対向きの粒子が散乱され、フェルミ速度だけでなく臨界指数の繰り込みも起こす。これらの相互作用による散乱では大きな運動量の変化はないので、この2つのタイプの散乱は前方散乱と呼ばれる。

朝永・Luttinger 模型では相互作用を前方散乱に限るので、ハミルトニアンが密度演算子に関して2次形式になる。したがって、粒子間の相互作用があるにも関わらず、ハミルトニアン ($H_K + H_I$) を対角化し厳密解を得ることができる。まず g_4 の項を速度の変化分 $v_F + g_4/(2\pi)$ として取り入れる。 g_2 項を含めた全ハミルトニアンを対角化するため、ユニタリー演算子 e^{iS} による変換を考えて非対角項 $J_+ J_-$ を消去する。ただし、

$$S = \frac{2\pi i}{L} \sum_{p \neq 0} \frac{\theta}{p} J_+(p) J_-(-p), \quad \tanh(2\theta) = -\frac{g_2}{2\pi v_F + g_4} \quad (44)$$

である。このようにパラメタ θ を選ぶとハミルトニアンは正準変換 $e^{iS} H e^{-iS}$ で、

$$\tilde{H} = \frac{2\pi v_F^*}{L} \sum_{p>0} [J_+(p) J_+(-p) + J_-(-p) J_-(p)] + \text{定数} \quad (45)$$

と対角化できる。ここで繰り込まれた速度は

$$v_F^* = (v_F + \frac{g_4}{2\pi}) \operatorname{sech}(2\theta) = [(v_F + \frac{g_4}{2\pi})^2 - (\frac{g_2}{2\pi})^2]^{1/2} \quad (46)$$

で与えられ、フェルミ面から計った励起スペクトルは、 $\epsilon(p) = v_F^* |p|$ の線形分散で与えられることになる。したがって、この系はギャップレスの励起を持つ量子臨界系である。このように、朝永・Luttinger 模型では、ハミルトニアンを密度演算子の2次形式で表示することができ、その結果この模型を厳密に解くことができる。

4.2 位相ハミルトニアン

前節までに議論した共形場の理論とのつながりを見るために、さらに進んで位相表示によるボゾン化を簡単に紹介する。まず、密度演算子から以下の式で2種類の正準共役なボゾン場 $\varphi(x)$ と $\Pi(x)$ を導入する。

$$\varphi(x) = \frac{i\pi}{L} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{p} e^{-\alpha|p|/2 - ipx} [J_+(p) + J_-(p)] + \frac{N\pi x}{L} + Q \quad (47)$$

$$\Pi(x) = \frac{-1}{L} \sum_{p \neq 0} e^{-\alpha|p|/2 - ipx} [J_+(p) - J_-(p)] - \frac{J}{L} \quad (48)$$

ここで $\alpha (\rightarrow 0)$ は、右辺の和を収束させるために導入した格子間隔程度の微量である。(47)の最後にある定数項 Q はボゾン場のフーリエ成分のゼロモードであり、(48)の J はそれに共役なカレントである。すなわち、 $[Q, J] = -i$ の交換関係が成立するものとする。上記の2つのボゾン場は

$$[\varphi(x), \Pi(y)] = i\delta(x-y) \quad (49)$$

の交換関係を満たす正準共役な場であることが簡単な計算からわかる。 $\varphi(x)$ は密度揺らぎ、また $\Pi(x)$ はゲージ変換の自由度に関連した量であるので、(49)の交換関係は粒子数と位相の間に成り立つ交換関係を表している。

(38)に現れたフェルミ場は、この2つの共役なボゾン場 $\varphi(x)$ と $\Pi(x)$ を用いて

$$\psi_{\pm} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \eta_{\pm} \exp[\pm i\varphi(x) - i\pi \int_{-\infty}^x \Pi(x') dx'] \quad (50)$$

と書くことができる。ただし、 η_{\pm} は反交換関係に関連した演算子であり ($(\eta_{\pm})^2 = 1$)、右向きと左向きのフェルミオン場の反交換関係を正しく出すために導入されている。上記のフェルミ場の導入の仕方は少し天下りの的であるが、これがフェルミの反交換関係を満たしていることは直接確かめることができる。式(50)は、1次元系ではフェルミ演算子を密度集団励起のボーズ演算子から構成できることを示している。

以上の手続きをふむと、朝永・Luttinger 模型のハミルトニアンをボゾン場 φ と Π を用いて

$$H = v_F^* \int dx \left[\frac{\pi K^*}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2\pi K^*} (\partial_x \varphi)^2 \right] \quad (51)$$

と書くことができる。ただし、ここで速度 v_F^* は(46)で定義されたもので、無次元の結合定数 K^* は朝永・Luttinger 模型に対して

$$K^* = \left[\frac{2\pi v_F + g_4 - g_2}{2\pi v_F + g_4 + g_2} \right]^{1/2} \quad (52)$$

と求められる。(51)の形が位相ハミルトニアンと呼ばれるもので、ボゾン化法の出発点となっているものである。固定点ハミルトニアン(51)が朝永・Luttinger 液体のクラスを特徴づけ、前節で議論した $c=1$ ガウシアン共形場理論のものに他ならない。

4.3 Heisenberg 模型のボゾン化

さて、1次元ハイゼンベルグ模型を例にとって、格子模型にボゾン化法を適用してみる。ハミルトニアンは

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} \left[\frac{1}{2} J (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) + J_z S_i^z S_j^z \right] \quad (53)$$

の形で与えられ、 z 方向の異方性として $\Delta = J_z/J$ を導入してある。スピンの大きさは $1/2$ とする。以下、格子点数 L からなる系を周期境界条件のもとで考察する。

この模型の低エネルギー励起をボゾン化法で扱うために、まずフェルミオンの演算子でハミルトニアンを表示し直す必要がある。まず \downarrow スピンが格子点をすべて埋めている場合

を真空にとり、 \downarrow スピンの \uparrow スピンに変化した格子点にフェルミ粒子が生成されたと考える。すなわち、フェルミオンの生成・消滅演算子 a_i^\dagger, a_i を用いると、例えば j 番目の格子点のスピンの z 成分は

$$S_j^z = a_j^\dagger a_j - 1/2 \quad (54)$$

と表現できる。さらに、 S_j^+ は \downarrow スピンを \uparrow スピンに変えるので、単純に考えると $S_j^+ = a_j^\dagger$ となるような気がするが、スピン演算子は異なるサイトにおいて交換する（反交換ではなく）ことを正しく表現しなければならない。したがって、スピン演算子をフェルミ演算子で書くためには、ボゾンとフェルミオンを結びつける変換を導入する必要がある。これは、Jordan-Wigner 変換と呼ばれる変換

$$S_j^+ = \exp[-i\pi \sum_{l=1}^{j-1} n_l] a_j^\dagger, \quad S_j^- = a_j \exp[i\pi \sum_{l=1}^{j-1} n_l] \quad (55)$$

で実現される。このフェルミ演算子を用いると、ハミルトニアンは

$$H = J \sum_{\langle ij \rangle} a_i^\dagger a_j + J_z \sum_{\langle ij \rangle} a_i^\dagger a_i a_j^\dagger a_j + \text{定数} \quad (56)$$

の相互作用するフェルミ粒子模型に帰着する。このように、Jordan-Wigner 変換を用いると、XY 成分がホッピング項に、Z 成分が相互作用項に変換される。外部磁場がゼロの場合、 \uparrow と \downarrow スピンの数は同じであるので、全格子数の半分は \uparrow スピンとなっている。これはフェルミオンの言葉で言うとバンドがちょうど半分詰まった half-filling の状態に対応している。したがって、フェルミ波数は磁場がゼロの場合 $p_F = \pi/2\alpha$ である（ α は格子間隔）。

4.3.1 ボゾン化と sine-Gordon 模型

さて、連続極限を考えてボゾン化の手続きに入る。もともとの XY 成分の項はフェルミ粒子の自由な運動エネルギー項に対応するので、この項は簡単にボゾン化できる。まず、フェルミ波数 $p_F = \pm\pi/(2\alpha)$ 付近でスペクトルを線形化する。次に、連続極限 $\alpha \rightarrow 0$ (格子間隔 α) を考え、フェルミ演算子を

$$a_j \rightarrow \sqrt{\alpha} [e^{ip_F x} \psi_+(x) + e^{-ip_F x} \psi_-(x)] \quad (57)$$

と連続的な場の演算子 $\psi_\pm(x)$ で置き換える。この連続場への移行で XY 成分の自由フェルミオン部分は、自由ボゾンのハミルトニアン

$$H = \int dx \left[\frac{\pi v_F}{2} \Pi^2 + \frac{v_F}{2\pi} (\partial_x \varphi)^2 \right] \quad (58)$$

に帰着する。ただし、 $v_F = J\alpha$ であり、相互作用がないので $K^* = 1$ となっている。次に、スピンの Z 成分からでてきた相互作用のボゾン化を行う。連続極限で相互作用の項は

$$\begin{aligned} \sum_i a_i^\dagger a_i a_{i+1}^\dagger a_{i+1} &= \alpha \int dx [\psi_+(x) \psi_+(x) + \psi_-(x) \psi_-(x) \\ &\quad + e^{-2ip_F x} \psi_+(x) \psi_-(x) + e^{+2ip_F x} \psi_+(x) \psi_-(x)] \times \{x \rightarrow (x + \alpha)\} \end{aligned} \quad (59)$$

となる。右辺を展開して振動項が積分後に消えることを考慮すると、相互作用ハミルトニアンは連続極限において

$$H_I = J_z \alpha \int dx [J_+ J_+ + J_- J_- + 4J_+ J_- - (\psi_+^\dagger \psi_-)^2 - (\psi_-^\dagger \psi_+)^2] \quad (60)$$

となる。ここで右辺で $J_\pm(x)$ で表された相互作用は朝永・Luttinger 模型のものであるので、(51) の位相ハミルトニアンのパラメータに繰り込まれる。一方、最後の項は朝永・Luttinger 模型にない相互作用であり、2粒子が一方のブランチから他方へ散乱されるウムクラップ散乱を表している。(50) 式のフェルミ場の表式をこれに代入すればこの相互作用もボゾン場で表示できる。すなわち、

$$\psi_+^\dagger(x) \psi_-(x) = \frac{-i}{2\pi\alpha} e^{-2i\varphi(x)} \quad (61)$$

の式を(60)に用いれば、 $\cos(4\varphi)$ に比例した非線型の相互作用が得られる。以上の結果をまとめると、連続極限の有効ハミルトニアンとして

$$H = \int dx \left[\frac{\pi v_F^* K^*}{2} \Pi^2 + \frac{v_F^*}{2\pi K^*} (\partial_x \varphi)^2 + \frac{J_z \alpha}{(2\pi\alpha)^2} \cos(4\varphi) \right] \quad (62)$$

を得る。最後の \cos 項が朝永・Luttinger 模型からのずれを表す非線型の相互作用となっている。ただし、速度 v_F^* と結合定数 K^* は(46),(52) 式で、 $g_2 = J_z \alpha$, $g_4 = J_z \alpha$ とおいたもので与えられる。この有効ハミルトニアンは、量子サインゴルドン模型として場の理論でなじみ深い模型である。

4.3.2 朝永・Luttinger 液体の不安定性とスピンギャップ生成

以上の有効ハミルトニアンの導出には、近似が入っていないように見えるが、連続極限をとる過程で相互作用 J_z の繰り込みが正しく取り入れられていない。したがって、ここで得られた K^* や v_F^* を用いると、XY 模型付近で J_z の小さい領域のみしか議論できない。しかしながら、 K^* や v_F^* が与えられた理論パラメタであると思うと、さらに正確な議論を行うことができる。すなわち、量子サインゴルドン模型に対して、繰り込み群を用いることによって最後の \cos 項がどのような効果をもたらすか調べることができる。 K^* の値によって系の性質が以下のように分類される。

- ◇ $K^* > 1/2$ 場合：繰り込みの結果、 \cos 項は irrelevant となり消える。これは、XY 的な異方性を持つ場合 $\Delta = J_z/J < 1$ に対応している。
- ◇ $K^* < 1/2$ 場合：このとき \cos 項は relevant となりギャップを生成する。これは、イジング異方性を持つ模型、 $\Delta = J_z/J > 1$ に対応する。
- ◇ $K^* = 1/2$ の場合： \cos 項は marginally irrelevant で繰り込みの結果消える。これは等方的模型 $\Delta = 1$ に対応する。スピン励起はギャップレスとなるが、種々の物理量に対数補正が現れる。

この結果は、Bethe 仮説法を用いて知られている厳密な結果と一致している。

4.4 非線型シグマ模型と Haldane ギャップ

ここまで、量子スピン鎖のギャップ生成に関してボゾン化法を用いた。この他に、量子スピン系に対する有効場の理論として、非線型シグマ模型と呼ばれる強力な方法がある [19, 20]。この方法は古典的な基底状態から出発して量子揺らぎを取り込むものである。反強磁性スピン鎖の場合は古典的なネール状態から出発するので、この方法はスピンの大きい極限からの展開といえる。非線型シグマ模型の方法の特筆すべき点は、系のトポロジカルな性質を反映した物理に対して著しい結論をひき出すことができる点である。ここでは、量子スピン鎖のギャップ生成が「スピンの大きさが整数か半整数かに依存する」という有名な Haldane ギャップの問題を説明する [19]。

まず、スピンのコヒーレント状態経路積分法を用いて、反強磁性鎖を $O(3)$ 非線形シグマモデルにマッピングする。Hamiltonian として、任意の大きさのスピンのスピン鎖

$$H = J \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} \quad (J > 0) \quad (63)$$

を考える。この系の分配関数 Z は、コヒーレント状態経路積分を使うと

$$Z = \int \prod_i D\vec{\Omega}_i \exp \left[-is \sum_i \omega[\vec{\Omega}_i] - \int_0^\beta d\tau H(\tau) \right] \quad (64)$$

$$H(\tau) = Js^2 \sum_i \vec{\Omega}_i \cdot \vec{\Omega}_{i+1}$$

で与えられる。ここに現れた Berry 位相と呼ばれるトポロジカル項 $\omega[\vec{\Omega}_i]$ は

$$\omega[\vec{\Omega}_i] \equiv \int_0^\beta d\tau \dot{\phi}_j (1 - \cos \theta_j)$$

で定義されている (上付きドットは時間微分)。 $\vec{\Omega}_i$ はスピンの向きを表す単位ベクトルである。 ω はスピンの極座標 $(1, \theta, \varphi)$ が $0 \leq \tau \leq \beta$ につくる閉曲線で囲まれた立体角である。また、この項は、作用の中に純虚数として現れるので系の干渉効果を表している。

反強磁性鎖の低エネルギー励起を半古典論で考えると、 $k = 0, \pi/a$ の 2 つのモードが重要となる。ここでは反強磁性的な場 ($k = \pi/a$) を $\vec{\phi}_i$ 、強磁性的なゆらぎの場 ($k = 0$) を \vec{l}_i を導入する。これを用いると $\vec{\Omega}_i$ は次のように表される。

$$\vec{\Omega}_i = (-1)^i \vec{\phi}_i \left(1 - \frac{\vec{l}_i^2}{s^2} \right) + \frac{\vec{l}_i}{s} \quad (65)$$

ここで条件 $|\vec{\Omega}_i|^2 = 1$ より $|\vec{\phi}_i|^2 = 1, \vec{\phi}_i \cdot \vec{l}_i = 0$ となる。量子ゆらぎが小さいとする半古典近似を採用し、 $\vec{l}, \vec{\phi}, \vec{\phi}'$ の 2 次まで取り込む。これを $H(\tau)$ に代入し連続極限を考えると、定数項を除いて次のように表される。

$$H(\tau) = Js^2 \sum_i \left[\frac{1}{2} (\vec{\phi}_{i+1} - \vec{\phi}_i)^2 + \frac{1}{2s^2} (\vec{l}_{i+1} + \vec{l}_i)^2 \right]$$

$$= Js^2 \int dx \left\{ \frac{1}{2} \vec{\phi}'^2 + \frac{2}{s^2} \vec{l}^2 \right\} \quad (66)$$

一方、Berry 位相項 ω に関して次のように変分 $\delta\omega$ を考える。

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^\beta d\tau \dot{\varphi} (1 - \cos \theta) \\ \delta\omega &= - \int_0^\beta d\tau (\dot{\theta} \delta\varphi - \dot{\varphi} \delta\theta) \sin \theta \\ &= - \int_0^\beta d\tau \delta \vec{n} \cdot (\vec{n} \times \dot{\vec{n}}) \quad \vec{n} \equiv (1, \theta, \varphi)\end{aligned}\tag{67}$$

このことを用いて $\omega[\vec{\Omega}_i]$ を $\vec{\Omega}_i = (-1)^i \vec{\phi}_i$ の周りで展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned}-is \sum_i \omega[\vec{\Omega}_i] &= -is \sum_i (-1)^i \omega[\vec{\phi}_i] - is \sum_i \delta\omega[(-1)^i \vec{\phi}_i] \\ &= \frac{is}{2} \int dx \frac{\partial \omega[\vec{\phi}]}{\partial x} + i \int_0^\beta d\tau \int dx (\vec{\phi} \times \dot{\vec{\phi}}) \cdot \vec{l} \\ &= i2\pi s Q + i \int_0^\beta d\tau \int dx (\vec{\phi} \times \dot{\vec{\phi}}) \cdot \vec{l}\end{aligned}\tag{68}$$

(68) への式変形では Berry 位相項 ω が立体角を意味することから、 4π の不定性を持っていることを考慮し、 x 軸方向に周期境界条件を課すことによって

$$\int dx \frac{\partial \omega[\vec{\phi}]}{\partial x} = \oint d\omega[\vec{\phi}] = 4\pi Q \quad (Q: \text{整数})$$

とおいた。(67) を利用すると Q はシグマ模型でよく知られた表式

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_0^\beta d\tau \int dx \vec{\phi} \cdot (\vec{\phi}' \times \dot{\vec{\phi}})$$

に帰着する。よって分配関数 Z は \vec{l} で積分できて

$$\begin{aligned}Z &= \int D\vec{\phi} D\vec{l} \exp \left[i2\pi s Q - \int_0^\beta d\tau \int dx \left\{ \frac{Js^2}{2} \vec{\phi}'^2 + 2J\vec{l}^2 - i (\vec{\phi} \times \dot{\vec{\phi}}) \cdot \vec{l} \right\} \right] \\ &= \int D\vec{\phi} \exp \left[i2\pi s Q - \int_0^\beta d\tau \int dx \left\{ \frac{Js^2}{2} \vec{\phi}'^2 + \frac{1}{8J} \dot{\vec{\phi}}^2 \right\} \right]\end{aligned}\tag{69}$$

となり、反強磁性スピン鎖が非線形シグマモデルにマッピングされた [19]。

繰り込み群を用いた非線型シグマ模型の研究によると、 $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ の時系は massive になり、ギャップの大きさが $\Delta \sim \exp(-\pi/g)$ となることが知られている。一方、 $\theta = \pi \pmod{2\pi}$ の時には厳密な証明はないものの、この系は massless になると信じられている。この事実を用いると、反強磁性スピン系に対して著しい結論が得られる。即ち、今の模型ではトポロジカルな項が $\theta = 2\pi s$ で与えられるため、スピンの半整数の場合、系の素励起は massless になり、スピンの整数の場合 massive になる、ということである。また、対応するスピンギャップ(スピン整数のとき)漸近的に $\Delta \sim \exp(-\pi s/2)$ となる。

以上の結果は、Haldane によって今から 20 年ほど前に予言されたものである [19]。特にスピンの大きさが整数の場合のスピンギャップを Haldane ギャップと呼ぶ。これまでの多くの理論的な研究で、この予言が正しいことが確かめられており、実験的にも Haldane ギャップ系の物質が多く発見されている。

非線型シグマ模型による解析は、低次元量子スピン系に関して多くの有益な知見をもたらしている。時間に余裕があれば、講義でこの点についてもふれたい。

5 応用

共形場の理論や朝永ラッティンジャー液体の概念は、物性物理のいろいろな現象に応用され大きな成果をあげている。まず、メゾスコピック系では量子細線の研究が進展しており、コンダクタンスの温度変化に朝永・Luttinger 液体特有のべき依存性が観測されている。量子ホール効果のエッジ状態も理想的な1次元系を実現しており、エッジ間のトンネルコンダクタンスにやはりべき型の温度依存性が観測され、理論の予言を裏付けた。また、高温超伝導物質の探索に刺激され、新しいタイプの1次元電子系や量子スピン系が1990年半ばから銅酸化物において次々と発見された。これらの(準)1次元酸化物のいくつかのものは、光電子放出スペクトルに「スピンと電荷の分離」が観測されている。より最近では、理想的な1次元電子系としてカーボンナノチューブの研究が急速に進展している。以下では、朝永・Luttinger 液体と関連してカーボンナノチューブと量子ホール効果のエッジ状態について簡単にふれる。

5.1 カーボンナノチューブ

典型的な1次元物質として知られるカーボンナノチューブ (Carbon Nanotube、以下CNと略) が登場したのは1990年に入ってからのものであり [21]、最近になって系統的な研究が進められるようになった [22]。

CNは六員環構造の炭素を2次元的に敷き詰めたグラファイト面を筒状に丸めた構造を持つ (図6)。2次元グラファイト面では炭素の π 電子が2次元電子系として振舞い、筒状にすることで円周方向に波数が量子化され軸方向の1次元電子系を実現する。直径は数ナノメートルから数十ナノメートル程度であり、1枚のグラファイト面から構成されるCNは単層CN、これが層状に重なったものは多層CNと呼ばれる。ここでは特に単層CNに着目してその興味深い性質を紹介する。

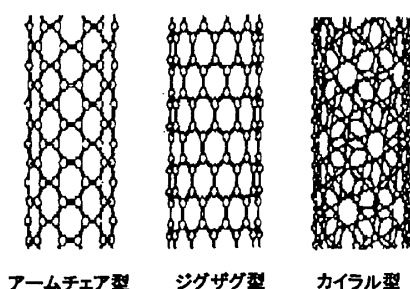


図 6: 単層カーボンナノチューブの模式図

グラファイト面からCNを作製する場合、グラファイト面をどのように巻き付けるかによりその性質が大きく異なることが知られている [23]。すなわち巻き方に違いによりCNは金属の性質を持つこともあれば、半導体としての性質を持つ場合もある。一般に巻き付け方はカイラリティーと呼ばれ、このカイラリティーの違いにより図6のように軸方向の断面の形状に因んでアームチェア型CN、ジグザグ型CNなどと呼ばれる。特に、アームチェア型CNは金属として振舞う。CNは大変興味深い1次元物質であり、アカデミックな研究対象であるばかりでなく、電気製品等にも応用されつつあり、しばしば新聞紙上を

賑わせている。

CN は、朝永・Luttinger 液体を実現している典型的な試料であることがさまざまな実験から明らかにされている。ここでは最近報告された興味深い理論と実験として、「交差した朝永・Luttinger 液体」と呼ばれる系について説明する [24, 25]。理論的なモデルは図

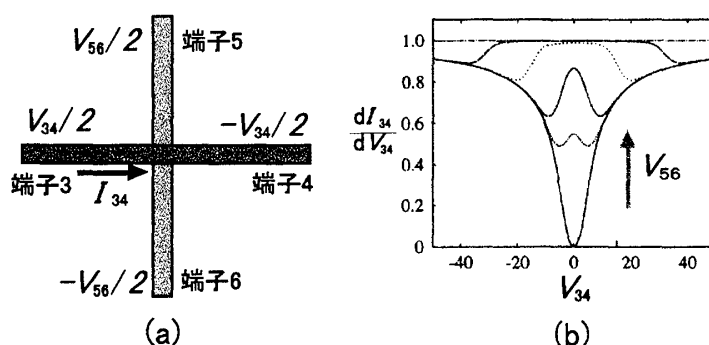


図 7: (a) 交差した朝永・Luttinger 液体の概念図, (b) 微分コンダクタンスの計算値。図 (b) は伝導体 2 のバイアスを増加させた時、矢印の方向にコンダクタンスが増加していることを表す (文献 [24] Fig.2 より転載。Copyright 1988 by the American Physical Society)。

7 のように 2 本の朝永・Luttinger 液体が交差点のみで結合したもので、Komnik と Egger によって導入された [24]。図 7 で横方向 (縦方向) の朝永・Luttinger 液体を伝導体 1(2) と呼ぶことにする。彼らは朝永・Luttinger 模型を用いて、伝導体 1 における微分コンダクタンスを計算し、これが伝導体 2 の相関効果を反映したバイアス依存性を持つことを明らかにした。すなわち、(1) 伝導体 1 のゼロバイアスコンダクタンスは伝導体 2 のバイアス依存性を持つこと、(2) 伝導体 2 におけるバイアスの大きさに比例した位置で伝導体 1 のコンダクタンスにくぼみ (dip 構造) が見られることを指摘した。特に (2) の原因として、伝導体 1 に存在する CDW が伝導体 2 における CDW と整合した時に図の交差点で一種のピン止め効果が起こることが挙げられている。このような振舞いは電子間相互作用が存在しない時には見られないことから、上記の「交差した系」では朝永・Luttinger 液体の性質を反映したコンダクタンスの振舞いが観測されるはずである。

この研究に刺激されて、Kim らはこの系を CN を用いた試料において実現し、その微分コンダクタンスの観測を行った [25]。用いた CN の直径はおよそ 25~30nm 程度である。この試料により観測された微分コンダクタンスでは、朝永・Luttinger 液体の振舞いとして予想されたゼロバイアスコンダクタンスの特徴や dip 構造が確認された。この結果は、CN が朝永・Luttinger 液体として振舞っていることを如実に示しており、朝永・Luttinger 液体の予言が実験的に観測された著しい例である。

5.2 量子ホール効果のエッジ状態

2次元の電子系に強い磁場をかけたとき、ホール抵抗が量子化された値をとる現象は、量子ホール効果として知られ、この著しい物理現象は標準抵抗としても利用されている [3]。量子ホール効果の量子化のためには、電子の励起にギャップが存在することが本質的であり、この意味では臨界現象とは関係のない現象にみえる。しかし、実際の物質は有限の大きさを持つので、必ず一次元的な「端」が出来る。この端にある電子状態はエッジ状態と呼ばれている。バルクの電子状態と違って、エッジ状態は音波的な低エネルギー励

起を持つので、臨界現象を示す。ここに共形場の理論と量子ホール効果の接点が見いだされる。このエッジ状態は、通常の一次元電子系と異なり、磁場の影響で一方向にのみに流れており、カイラル朝永・Luttinger 液体と呼ばれている。これは片側だけの $c = 1$ 共形場理論で記述される [26]。

エッジ状態の研究の利点は、大きくって2つある。まずエッジ状態がバルクの量子ホール効果の情報を含んでいることである。例えば、 $\nu = 1/3, 1/5, 1/7, \dots$ の filling で与えられる分数量子ホール効果の場合、そのエッジを流れる電子の1粒子グリーン関数は、朝永・Luttinger 液体に特有のべき依存性

$$g(x - x') \sim |x - x'|^{-1/\nu} \quad (70)$$

を示すが、大切なことはこの臨界指数が filling factor ν のみで決定されているということである [26]。もう少し異なった表現をすると、共形場理論に現れる共形次元が量子ホール効果のトポロジカルな不変量のみで決まっている。このことは、通常の朝永・Luttinger 液体で共形次元が相互作用などによって敏感に変化するのと対照的である。さらに、エッジでは電子が一方向のみにしか流れていないため後方散乱の影響を受けず、系の乱れや不純物によるアンダーソン局在の問題が生じない。これは、実験的に朝永・Luttinger 液体を観測するにはたいへん重要である。これまでにも準1次元物質の候補として、有機導体や量子細線などが研究されてきたが、局在の問題のため、べき異常の観測が困難であった。このように、量子ホール系のエッジ状態は、理想的な1次元量子系の研究舞台を提供している。

実験的にも、2つのエッジ間のトンネル効果に関する実験において上記のべき依存性が観測された [27]。この実験は、分数量子ホール効果のエッジ状態がカイラル朝永・Luttinger 液体になっていることの一つの証ともなっている。2つのエッジを近づけると、エッジ間のトンネル電流が流れる。理論的には、トンネルコンダクタンスの温度依存性は、

$$G(T) \sim T^{(2/\nu-2)}, \quad (71)$$

となる [26, 28]。トンネルコンダクタンスを計算するためには、粒子を消したりつけたりするプロセスが必要なので、このべき異常は基本的に (70) 式の1粒子グリーン関数のべき依存性を反映している。例えば、 $\nu = 1/3$ の場合にはトンネル伝導度は、温度の関数として T^4 に比例して減少し、 $T = 0$ でゼロとなる。実験はこの T^4 則を再現し [27]、カイラル朝永・Luttinger 液体理論が正しいことを示している。また、この実験により分数量子ホール効果のトポロジカルな量はホール抵抗のみならず、エッジ間のトンネルなどでも観測できることが明らかになった。

6 おわりに

以上見てきたように、1次元量子系の低エネルギー物理の理論的な側面は、長年にわたって蓄積された研究成果や最近の共形場の理論を用いた研究により、ほぼ整備されてきた。一方、実験的には、近年の実験技術やテクノロジーの進歩のおかげで低次元量子系の思いがけない側面が着々と明らかにされつつある。また、高温超伝導体に関連した酸化物で次から次へと新しい1次元物質が合成あるいは発見されている。このように1次元電子系にまつわる話題は、量子細線、カーボンナノチューブ、量子ホール効果のエッジ状態、

有機物質、酸化物などたいへん豊富になっており、ここしばらく実験、理論ともに興味は尽きないようである。

謝辞

1次元量子系に関する共同研究者である梁成吉、藤本聡、福井隆裕、藤井達也、塚本康正、古賀昌久、川口晃、宮下哲ほか多くの方々に感謝します(敬称略)。

参考文献

- [1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **241**, 333 (1984).
- [2] 川上則雄、梁成吉、「共形場理論と1次元量子系」(岩波書店、1997年)
- [3] 物理学論文選集「物性物理における場の理論的方法」(日本物理学会:青木秀夫、川上則雄、永長直人編)
- [4] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950).
- [5] J. M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).
- [6] F.D.M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981)
- [7] J. L. Cardy, Nucl. Phys. B **270** [FS 16], 186 (1986).
- [8] H. W. J. Blöte, J. L. Cardy and M. P. Nightingale, Phys. Rev. Lett. **56**, 742 (1986).
- [9] I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **56**, 746 (1986).
- [10] N. Kawakami and S.-K. Yang, Phys. Lett. **148A**, 359 (1990); J. Phys. C **3**, 5983 (1991).
- [11] H. Frahm and V.E. Korepin, Phys. Rev. B **42**, 10553 (1990).
- [12] E.H. Lieb and F.Y. Wu, Phys. Rev. Lett. **20**, 1445 (1968).
- [13] F. Woynarovich, J. Phys. A **22**, 4243 (1989).
- [14] I. Affleck and A. W. W. Ludwig, Nucl. Phys. B **352**, 849 (1991); 641 (1991).
- [15] P. Nozières and A. Bandin, J. Phys. **41**, 193 (1980).
- [16] 藤本聡、川上則雄、梁成吉、固体物理
- [17] N. Andrei, K. Furuya and J. H. Lowenstein, Rev. Mod. Phys. **55**, (1983) 331; A. M. Tsvelick and P. B. Wiegmann, Adv. Phys. **32**, (1983) 453.

- [18] S. Fujimoto, N. Kawakami, and S. -K. Yang, Phys. Rev. **B50**, (1994) 1046; E. Wong and I. Affleck, Nucl. Phys. **B417**, (1994) 403.
- [19] F. D. M. Haldane, Phys. Lett. **93A**, 464 (1983).
- [20] 永長直人, 「物性論における場の理論的方法」(岩波書店、1995 年)
- [21] S. Iijima, Nature **354**, 56 (1991)
- [22] R. Saito, G. Dresselhaus and M Dresselhaus, *Physical Properties of Carbon Nanotubes* (Imperial College Press)
- [23] N. Hamada, S. Sawada and A. Oshiyama, Phys. Rev. Lett. **68**, 1579 (1992).
- [24] A. Komnik and R. Egger, Phys. Rev. Lett. **80**, 2881 (1998).
- [25] J. Kim et al., Preprint: cond-mat/0005083.
- [26] X. G. Wen, Phys. Rev. B **41**, 12838 (1990)
- [27] F. P. Miliken, C. P. Umbach, and R. A. Webb, Solid State Commun. **97**, 309 (1996).
- [28] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **68**, 1220 (1992);
A. Furusaki and N. Nagaosa, Phys. Rev. B **47**, 4631 (1993).